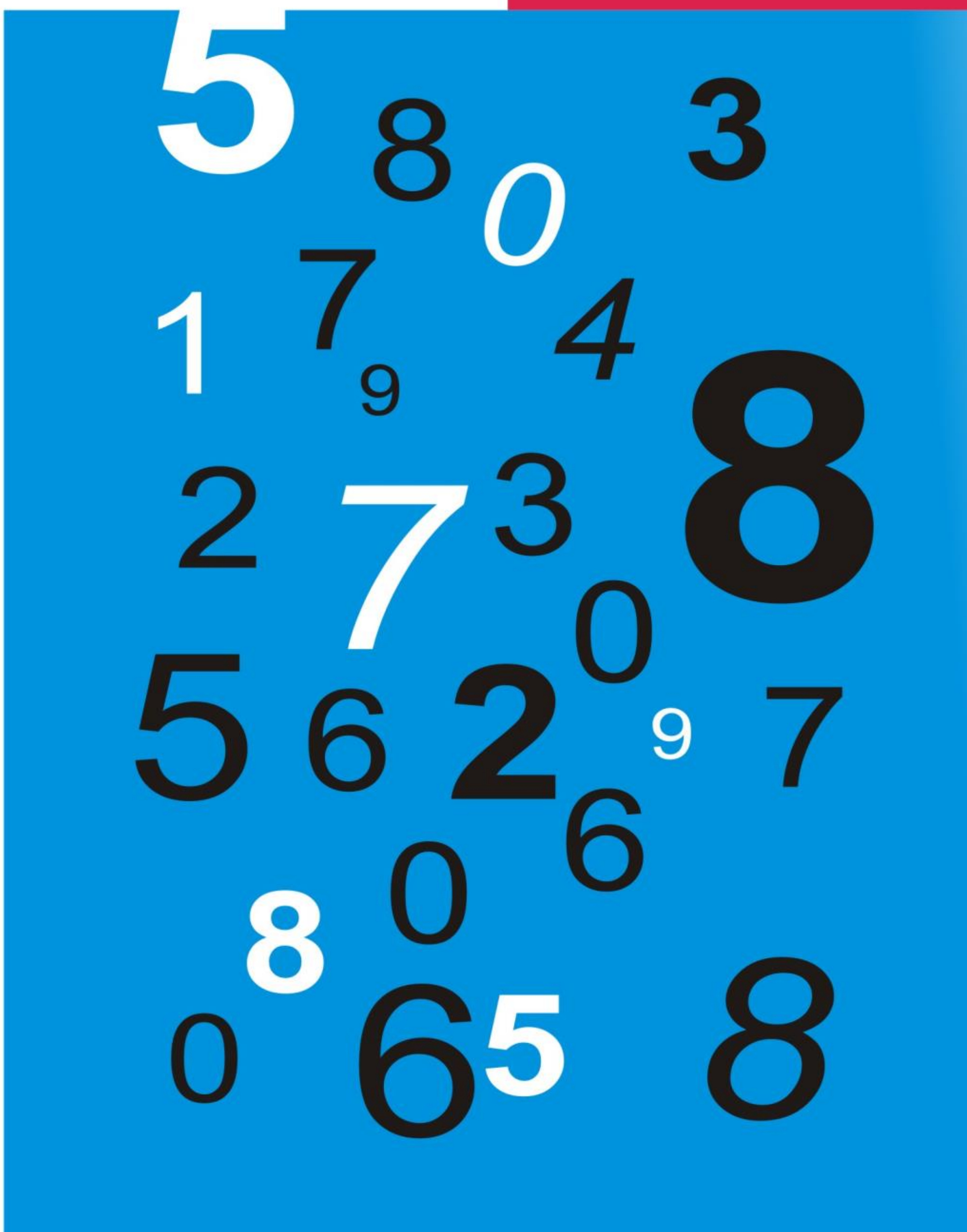
ISSN: 2337-7682

eduMATH

JURNAL PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

Volume 6. Nomor 2. Nopember 2018



PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
S T K I P P G R I Jombang

REDAKSI

Penerbit :
Program Studi Pendidikan Matematika STKIP PGRI Jombang

Alamat :
Program Studi Pendidikan Matematika
Kampus STKIP PGRI Jombang
Jln. Pattimura III/20 Jombang, Telp : (0321)861319
p.matematika.stkipjb@gmail.com

PENGANTAR REDAKSI

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat serta karunia-Nya kepada kami sehingga kami berhasil menerbitkan jurnal “e*duMATH*” volume 6 Nomor 2 edisi Nopember 2018.

Penerbitan jurnal “e*duMATH*” ini untuk memfasilitasi dosen program studi pendidikan matematika, guru matematika, dan mahasiswa pendidikan matematika agar dapat mempublikasikan hasil karya yang dihasilkan. Jurnal ini berisikan tentang artikel yang membahas tentang matematika dan pendidikan matematika.

Kami menyadari bahwa jurnal “e*duMATH*” ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran dari semua pihak yang bersifat konstruktif selalu kami harapkan demi kesempurnaan jurnal ini.

Akhir kata, kami sampaikan terima kasih kepada Mitra Bestari dan semua pihak yang telah berperan serta dalam penerbitan jurnal “e*duMATH*” ini dari awal sampai akhir. Semoga Allah SWT senantiasa meridhai segala usaha kita. Amin.

DAFTAR ISI

KETENTUAN PENULISAN

1. Artikel yang dimuat dalam jurnal meliputi naskah tentang hasil penelitian, gagasan konseptual, kajian teori, aplikasi teori dan tinjauan kepustakaan tentang pendidikan Matematika.
2. Naskah belum diterbitkan dalam jurnal dan media cetak lain.
3. Naskah merupakan karya orisinal, bebas dari plagiasi dan mengikuti etika penulisan.
4. Segala sesuatu yang menyangkut perijinan pengutipan, penggunaan *softwere* untuk pembuatan naskah atau ihwal lain yang terkait dengan HAKI yang dilakukan oleh penulis artikel, berikut konsekuensi hukum yang mungkin timbul karenanya menjadi tanggung jawab penulis naskah.
5. Semua naskah ditelaah oleh mitra bestari yang ditunjuk oleh penyunting menurut bidang kepakaranya. Penulis diberikan kesempatan untk melakukan revisi naskah atas dasar saran dari mitra bestari atau penyunting. Kepastian pemuatan naskah atau penolakan akan diberitahukan secara tertulis.
6. Ketentuan penulisan naskah:
   a. Naskah ditulis dengan 1.5 spasi, kertas A4, panjang 10-20 halaman.
   b. Berkas naskah ditulis dalam microsoft word, dan diserahkan melalui email p.matematika.stkipjb@gmail.com dan konfirmasi ke redaksi setelah pengiriman.
   c. Sistimatika penulisan :
      1). Hasil penelitian
         a) Judul; b) Nama penulis; c)Abstrak; d)Kata kunci; e) Pendahuluan; f) Metode penelitian; g)Hasil penelitian; h)Pembahasan; i) Simpulan dan saran; j)Daftar rujukan
      2). Hasil non penelitian
         a) Judul; b) Nama penulis; c) Abstrak; d) Kata kunci; e) Pendahuluan; f) Bahasan Utama; g)Penutup atau Simpulan; h) Daftar rujukan

EduMath

Volume 6	Nomor 2, Nopember 2018	Halaman 42 - 52

HAMBATAN MAHASISWA DALAM MEMBANGUN BUKTI MATEMATIS BERDASARKAN KERANGKA TOULMIN

Ulumul Umah
Universitas Pesantren Tinggi Darul Ulum
ulumul.umah@mipa.unipdu.ac.id

Abstrak: Sebagai salah satu bentuk dari penalaran, pembuktian merupakan kompetensi yang dibutuhkan oleh seorang calon guru matematika. Namun, pada kenyataannya membangun bukti seringkali sangat sulit dilakukan oleh calon guru. Penalaran yang mereka lakukan masih bersandar hanya pada penalaran induktif yaitu memperhatikan beberapa contoh kasus. Kesulitan dalam membuktikan dapat terjadi karena adanya hambatan dalam proses penalaran. Tujuan dari penelitian ini yaitu mendeskripsikan hambatan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pesantren Tinggi Darul 'Ulum Jombang dalam membangun bukti matematis berdasarkan kerangka argumen Toulmin.Jenispenelitian yang digunakandalampenelitianiniadalahkualitatifdeskriptif. Instrumen dalam penelitian ini adalah peneliti dan dilengkapi dengan lembar tes serta pedoman wawancara. Data yang diperoleh selanjutnya dianalisis tiap komponennya berdasarkan kerangka kerja Toulmin.Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa hambatan dialami oleh subjek pada beberapa komponen dari kerangka argumen Toulmin. Sebagian besar subjekdalam penelitian ini juga kesulitan menemukan contoh penyangkal ketika diminta mengevaluasi suatu pernyataan. Selain itu, beberapa subjek tidak dapat mengidentifikasi komponen data dalam argumen yang dibangunnya.

Kata Kunci: *Bukti Matematis, Penalaran Matematis, Argumen Toulmin.*

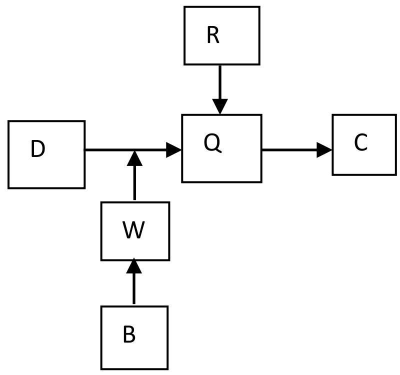
PENDAHULUAN

Penalaran merupakan proses berpikir yang mencakup berpikir dasar dan berpikir tingkat tinggi, tidak termasuk mengingat (Subanji, 2011: 4). Dengan demikian pemecahan masalah matematis dapat dilakukan dengan sukses dengan adanya kemampuan bernalar. Bernalar dapat diartikan sebagai proses membangun argumen untuk melakukan klaim terhadap suatu kesimpulan. Thompson (1996) mendeskripsikan penalaran matematis secara eksplisit sebagai "inferensi, deduksi, induksi, dan asosiasi dalam hal kuantitas dan struktur" yang mengikuti pandangan Piaget bahwa penalaran matematis dan sains adalah aktivitas yang Mengarah pada pemahaman individu tentang kuantitas dan struktur. Penalaran matematika dapat mengambil banyak bentuk, mulai dari penjelasan informal dan pembenaran bagi deduksi formal, serta pengamatan induktif (NCTM, 2009: 4). Hasil dari penalaran ini dapat berupa tulisan atau ucapan untuk menjamin kesahihan suatu pernyataan. Salah satu bentuk hasil dari penalaran yaitu bukti. Brodie (2010: 9) menyetujui pandangan bahwa bukti adalah salah satu bentuk argumen dan justifikasi tetapi tidak semua argumen dan justifikasi adalah bukti, dan bukti formal tidak selalu merupakan justifikasi atau penjelasan ide-ide matematis yang memadai.

Sebagai salah satu bentuk dari penalaran, pembuktian merupakan kompetensi yang dibutuhkan oleh seorang calon guru matematika. Penalaran dan bukti harus menjadi pengalaman siswa secara konsisten sejak pendidikan kanan-kanak hingga sekolah menengah (NCTM, 2002: 56). Namun, pada kenyataannya membangun bukti seringkali sangat sulit dilakukan oleh calon guru matematika. Hasil observasi terhadap mahasiswa calon guru pada tahun ke-2 di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pesantren Tinggi Darul Ulum (Unipdu) Jombang menunjukkan bahwa mereka seringkali terhenti dan tidak dapat bekerja ketika diminta untuk menyusun bukti. Ketika mahasiswa diminta memberikan suatu argumen, penalaran yang mereka lakukan masih bersandar pada penalaran induktif yaitu memperhatikan beberapa contoh kasus kemudian menggeneralisasikannya untuk menyokong justifikasi.

Bekerja secara induktif menjadi ciri penalaran bagi pemula seperti pada temuan Umah (2016) yaitu siswa tingkat sekolah menengah pertama lebih cenderung mengambil bentuk penalaran induktif. Pada tingkatan yang lebih tinggi, seorang peserta didik harus bergesar pada kemampuan bernalar secara deduktif meskipun bekerja secara induktif juga masih diperlukan. Tall dkk (2010) menunjukkan bahwa struktur bukti bersifat berkembang. Perkembangan tersebut merupakan pertumbuhan alami manusia dan tidak seharusnya dipandang sebagai pertumbuhan melalui tingkatan yang kaku dan bersifat diskrit, tetapi sebagai pertumbuhan jangka panjang dalam kematangan untuk membangun jangkauan penuh berpikir matematis dari kesadaran perseptual menuju struktur pengetahuan deduktif.

Stephen E. Toulmin adalah seorang filsuf yang menguraikan suatu argumen berdasarkan komponen-komponen pembangunnya. Model argumen Toulmin memiliki 6 tipe pernyataan dasar yang masing-masing memainkan peran yang berbeda yang saling berkaitan seperti yang digambarkan pada Gambar 1 berikut.



Gambar1. Model ArgumenUmumToulmin (Toulmin, 2003)

Conclusion (C) merupakan pernyataan yang diharapkan dapat meyakinkan orang lain. *Data* (D) merupakan dasar dari argumen, bukti yang relevan untuk klaim. *Warrant* (W) menjustifikasi hubungan antara data dan kesimpulan (*conclusion),* sebagai contoh adalah menyatakan suatu aturan, definisi, atau membuat analogi. *Warrant* didukung oleh *backing* (B) yang menghadirkan bukti lebih jauh. *Modal Qualifier* (Q) mengkualifikasi kesimpulan dengan mengekspresikan derajat keyakinan, dan *rebuttal* (R) yang berpotensi menolak kesimpulan dengan menyatakan kondisi dimana kesimpulan tersebut tidak berlaku.

Kerangka argumen yang dirumuskan oleh Toulmin ini mengacu pada logika umum dan banyak digunakan dalam analisis kevalidan argumen di bidang hukum. Namun, penggunaan kerangka argumen tersebut memungkinkan penggunaannya secara luas di bidang lain, termasuk dalam penalaran matematika. Kegunaan model Toulmin untuk menganalisis argumen matematis berbeda dengan pendekatan formal namun memiliki kekuatan kehandalan analisis yang tidak dapat ditunjukkan dengan pendekatan formal (Krummheuer, 1995; Yackel, 2002; Knipping, 2002;Aberdein, 2005;Aberdein, 2006; Brinkerhoff ,2007; Tall, 2009).

Hanna and Jahnke (1996) menyatakan bahwa tidak pernah ada seperangkat kriteria yang berlaku secara universal bagi validitas suatu bukti matematis. Karena tidak ada kriteria universal, kesulitan dalam menuliskan pembuktian seringkali tidak tampak jelas bentuknya. Hal ini menyebabkan pendidik sulit menentukan strategi apa yang harus dilakukan untuk mengatasi kesulitan tersebut. Kesulitan dalam membuktikan dapat terjadi karena adanya hambatan dalam proses penalaran. Karena proses penalaran terjadi dalam pikiran, maka untuk mendeskripsikannya diperlukan suatu kerangka yang mampu menguraikan struktur argumen-argumen di dalam penalaran secara eksplisit.

Tujuan dari penelitian ini yaitu mendeskripsikan hambatan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Pesantren Tinggi Darul ‘Ulum Jombang dalam membangun bukti matematis berdasarkan kerangka argumen Toulmin. Dengan mengetahui jenis hambatan dalam proses membangun bukti, pemberian bantuan kognitif lebih mudah untuk dilakukan. Hasil penelitian diharapkan dapat menjadi acuan dalam melakukan tidak lanjut dalam mengatasi kesulitan mahasiswa dalam membangun bukti matematis.

METODE PENELITIAN

Berdasarkan karakteristik dan tujuan yang ingin dicapai, maka pendekatan kualitatif digunakan dalam penelitian ini. Instrumen penelitian ini adalah peneliti yang dipandu dengan lembar tes dan pedoman wawancara. Peran peneliti sebagai partisipan penuh dan kehadiran peneliti tidak diketahui statusnya sebagai peneliti oleh subjek. Peneliti bertindak sebagai instrumen utama penelitian yang mengumpulkan data, menganalisis data, menafsirkan data, dan melaporkan hasil penelitian. Peneliti mengumpulkan data selama subjek menyusun bukti dari pernyataan yang terdapat pada lembar tes kemudian melakukan wawancara sebagai bentuk klarifikasi atau penggalian data lebih lanjut. Wawancara yang dilakukan berupa wawancara tak terstruktur, yaitu pertanyaan tidak disusun terlebih dahulu tetapi disesuaikan dengan keadaan dan ciri yang unik dari responden. Bentuk tes yang digunakan pada penelitian ini ditunjukkan pada Gambar 2. Tes terdiri dari dua pernyataan yang berbeda, namun pada topik yang sama dan memiliki tujuan yang sama, yaitu memberikan gambaran bentuk bukti matematis subjek.

Bagian I

Evaluasi kebenaran pernyataan berikut

1. $c \leq c^2$ untuk $0 \leq c, c \in \mathbb{R}$
2. Jika$0 \leq a < b$ maka $a^2 < ab < b^2$

Bagian II

1. Buktikanbahwa$|a + b| = |a| + |b|$ jika dan hanya jika $ab \geq 0$, untuk $a, b \in \mathbb{R}$

Gambar 2. Instrumen Tes

Setelah data diperoleh, peneliti menganalisis data yang sudah diperoleh, kemudian mengumpulkan data lebih lanjut dan kembali menganalisisnya. Proses pengumpulan data dan analisis data ini dilakukan secara berkesinambungan selama penelitian. Pengecekan kebasahan data penelitian dilakukan dengan membandingkan hasil tes dan wawancara dari kedua pernyataan.

Subjek penelitian ini dipilih dari sebelasmahasiswa Program Studi Matematika Universitas Pesantren Tinggi Darul 'Ulum Jombang. Subjek penelitian dipilih berdasarkan kriteria mahasiswa yang memberikan jawaban tes yang salah. Dari semua mahasiswa yang memberikan jawaban salah, mahasiswa yang memberikan argumen dengan contoh kasus-kasus serta dapat mengkomunikasikan ide dengan baik dipilih sebagai subjek penelitian. Berdasarkan kriteria mahasiswa yang diinginkan, diperoleh empatsubjek penelitian.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

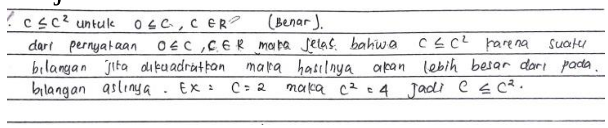
Langkah awal pada pemilihan subjek yaitu mahasiswa diberikan tes. Tes tersebut terdiri dari dua pernyataan yang perlu dievaluasi kebenarannya serta satu pernyataan untuk dibuktikan. Pada tes bagian pertama, disediakan dua pernyataan salah, dengan ini diharapkan dapat diketahui bagaimana mahasiswa merespon suatu pernyataan yang perlu diselidiki kebenarannya, serta bagaimana mahasiswa menganalisis kemungkinan tidak berlakunya suatu pernyataan dengan mencari contoh penyangkal. Sedangkan pada tes bagian kedua menunjukkan suatu pernyataan benar yang perlu dibuktikan. Melalui tes bagian kedua, mahasiswa menunjukkan bentuk bukti formal yang mereka susun.

Berdasarkan karakteristik respon mahasiswa dalam menuliskan bukti, maka mahasiswa dikelompokkan menjadi 5 yaitu kelompok 1 (NA, FH), kelompok 2 (JS), kelompok 3 (HL dan AN), dan kelompok 4 (FA), kelompok 5 (subjek lainnya). Pada kelompok 1, subjek NA lebih konsisten dalam memberikan respon terhadap pernyataan 1, 2, dan 3. Sedangkan HL dan AN memiliki respon yang sama pada pernyataan 1 dan 2.

Berdasarkan pertimbangan karakteristik respon dan kemampuan komunikasi, peneliti menetapkan NA, JS, HL, dan FA sebagai subjek. Mahasiswa pada kelompok 5 tidak dijadikan subjek karena tidak memiliki karakteristik yang diperlukan untuk memberikan data penelitian secara mendalam.

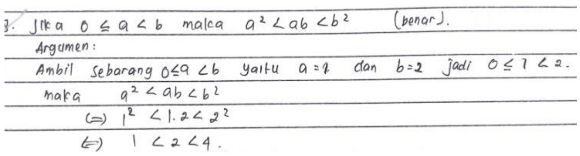
Berikut adalah respon subjek dalam mengevaluasi pernyataan pada tes bagian I.

1. Subjek NA



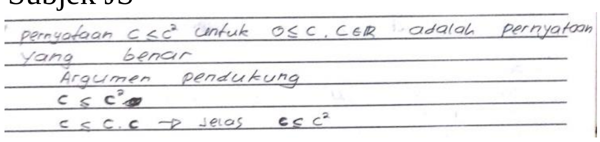
Gambar 3. Respon subjek NA terhadap Pernyataan 1

Gambar 3 menunjukkan subjek NA menyatakan bahwa pernyataan 1 benar dengan argumen bahwa kuadrat suatu bilangan selalu lebih besar dari bilangan tersebut, kemudian memberikan satu contoh kasus untuk mendukung pernyataannya. Argumen subjek NA berlandaskan pada argumen induktif, namun sunjek tidak berhasil menemukan kasus dimana pernyataan tersebut tidak berlaku.



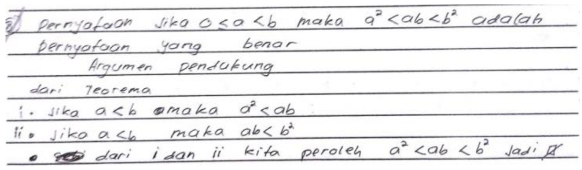
Gambar 4. Respon subjek NA terhadap Pernyataan 2

2. Subjek JS



Gambar 5. Respon subjek JS terhadap Pernyataan 1

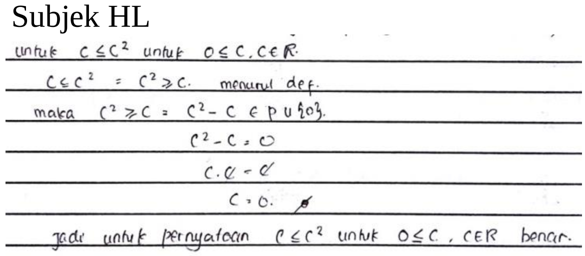
Gambar 5 menunjukkan subjek JS menyatakan bahwa pernyataan 1 benar, argumen yang dituliskan menunjukkan bahwa suatu bilangan jika dikalikan oleh bilangan lain akan lebih besar dari bilangan yang tidak dikalikan. Hasil wawancara menunjukkan bahwa subjek mengambil kesimpulan ini juga berasarkan pengambilan contoh-contoh kasus pendukung.



Gambar 6. Respon subjek JS terhadap Pernyataan 2

Gambar 6 menunjukkan subjek JS menyatakan bahwa pernyataan 2 benar dengan argumen jika $a < b$ maka $a^2 < ab$. JS tidak menggunakan data mengenai nilai a dan b. Subjek tidak meninjau bahwa pernyataannya tidak berlaku jika a nonpositif. Hasil wawancara juga menunjukkan bahwa argumennya dilandaskan pada contoh kasus-kasus.

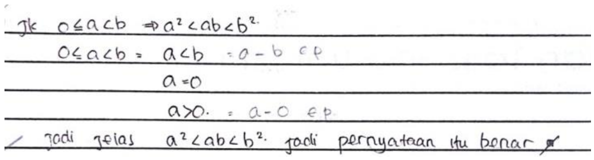
3. Subjek HL



Gambar 7. Respon subjek HL terhadap Pernyataan 1

Seperti pada Gamabr 7, subjek HL menyatakan bahwa pernyataan 1 benar. Subjek tidak menunjukkan bahwa $c \le c^2$

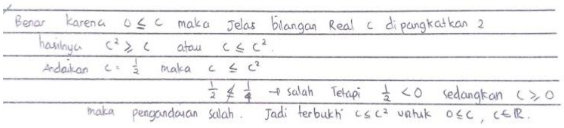
berlaku untuk $0 \leq c$, namun menjadikan $c \leq c^2$ sebagai data dan menunjukkan bahwa $0 \leq c$. Meskipun demikian, dalam proses menunjukkan kebenaran pernyataan, subjek memberikan argumen yang tidak valid yaitu $c \cdot c = c \Leftrightarrow c = 0$, subjek juga tidak menyadari bahwa pembagian dengan nol menyebabkan nilai yang tidak terdefinisi. Pada akhirnya subjek tidak dapat menunjukkan bahwa $0 < c$.



Gambar 8. Respon subjek HL terhadap Pernyataan 2

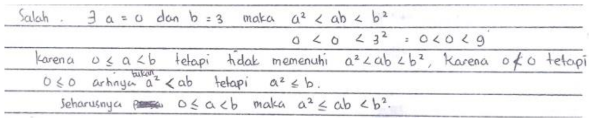
Selanjutnya seperti yang ditunjukkan Gambar 8, subjek HLmenunjukkan kemungkinan nilai a yaitu positif atau nol, namun tidak menunjukkan hubungan antara a^2 dan ab ketika nilai $a = 0$. Subjek menyimpulkan bahwa pernyataan 2 benar.

4. Subjek FA



Gambar 9. Respon subjek FA terhadap Pernyataan 1

Respon subjek FA seperti pada Gambar 9 menunjukkan bahwa ia memberikan contoh kasus untuk nilai $c = \frac{1}{2}$, namun subjek melakukan kesalahan saat meninjau kasus ini yaitu subjek menyatakan bahwa $\frac{1}{2} < 0$ sehingga menganggap kasus ini tidak termasuk dalam cakupan $0 \leq c$. Dengan demikian, subjek FA menyimpulkan bahwa pernyataan 2 benar.

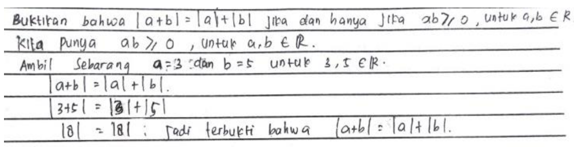


Gambar 10. Respon subjek FA terhadap Pernyataan 2

Subjek FA menyatakan bahwa pernyataan 2 bernilai salah seperti pada Gambar 10. Subjek menunjukkan suatu contoh kasus dimana $a = 0$ yang menyangkal pernyataan tersebut.

Keempat subjek dalam penelitian ini mengalami hambatan saat menyusun bukti matematis pada tes bagian II. Meskipun pernyataan 3 berbentuk biimplikasi, semua subjek tidak membuktikan pernyataan dari dua arah. Deskripsi bukti matematis oleh masing-masing subjek beserta struktur argumennya berdasarkan kerangka Toulmin diuraikan sebagai berikut.

1. Subjek NA



Gambar11. Pembuktian Matematis oleh Subjek NA

Untuk membuktikan pernyataan 3, subjek NA mengambil suatu contoh kasus untuk mendukung pernyataan. Subjek tidak membangun bukti secara deduktif. Struktur argumen subjek NA dapat diuraikan sebagai berikut.

Data $:a, b \in \mathbb{R}$ dan $ab \geq 0$

Warrant $:|3+5| = |3| + |5|$

Backing $:a = 3, b = 5$

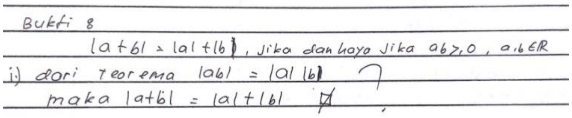
$3 \cdot 5 \geq 0$

Rebuttal : Kecuali jika ada contoh penyangkal

Qualifier : Sehingga dimungkinkan

Conclusion $:|a+b| = |a| + |b|$

2. Subjek JS


Bukti :
$|a+b| = |a|+|b|$, jika dan hanya jika $ab \geq 0$, $a,b \in R$
i) dari teorema $|ab| = |a||b|$
maka $|a+b| = |a|+|b|$

Gambar11. Pembuktian Matematis oleh Subjek JS

Subjek JS memberikan bukti dengan menganalogikan dengan teorema sebelumnya, namun analogi tersebut tidak disertai argumen lebih jauh. Struktur argumen subjek JS dapat diuraikan sebagai berikut.

Data : $a, b \in \mathbb{R}$ dan $ab \geq 0$

Warrant :Analog dari *backing* untuk penjumlahan

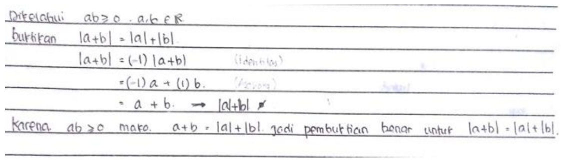
Backing : $|ab| = |a||b|$ *untuk* $a, b \in \mathbb{R}$(teorema)

Rebuttal : Kecuali jika ada contoh penyangkal

Qualifier : Sehingga dimungkinkan

Conclusion: $|a+b| = |a| + |b|$

3. Subjek HL


Diketahui $ab \geq 0$. $a,b \in R$
Buktikan $|a+b| = |a|+|b|$
$|a+b| = (-1)\,|a+b|$
$= (-1)\,a + (1)\,b.$
$= a + b. \rightarrow |a|+|b|$
Karena $ab \geq 0$ maka $a+b = |a|+|b|$ jadi pembuktian benar untuk $|a+b| = |a|+|b|$.

Gambar 12. Pembuktian Matematis oleh Subjek HL

Subjek HL mencoba menunjukkan sifat elemen identitas bilangan real serta sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan dalam pembuktiannya, meskipun hal tersebut tidak memperkuat argumen secara berarti. Subjek juga tidak memperhatikan definisi nilai mutlak. Struktur argumen subjek HL dapat diuraikan sebagai berikut.

Data : $a, b \in \mathbb{R}$ dan $ab \geq 0$

Warrant : $a + b = |a| + |b|$

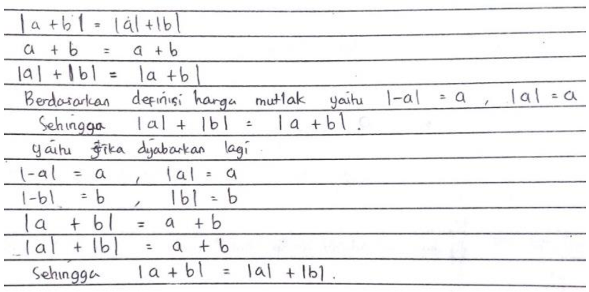
Backing : $|a+b| = |a| + |b|$

Rebuttal : Kecuali jika ada contoh penyangkal

Qualifier : Sehingga dimungkinkan

Conclusion : $|a+b| = |a| + |b|$

4. Subjek FA


$|a+b| = |a|+|b|$
$a + b = a + b$
$|a| + |b| = |a+b|$
Berdasarkan definisi harga mutlak yaitu $|-a| = a$, $|a| = a$
Sehingga $|a| + |b| = |a+b|$.
yaitu jika dijabarkan lagi
$|-a| = a$, $|a| = a$
$|-b| = b$, $|b| = b$
$|a+b| = a+b$
$|a| + |b| = a+b$
Sehingga $|a+b| = |a|+|b|$.

Gambar 13. Pembuktian Matematis oleh Subjek FA

Dalam pembuktian ini subjek FA ingin menunjukkan bahwa harga mutlak selalu bernilai positif, namun ia kurang lengkap dalam menuliskan definisi. Subjek berargumen bahwa $|a| = a$ tanpa menyatakan kondisi nilai a sebagai bilangan negatif atau nonnegatif. Demikian halnya dengan $|a + b| = a + b$ tanpa disertai kondisi $(a + b)$ negatif atau nonnegatif. Subjek tidak menggunakan data yang diketahui yaitu $ab \geq 0$ sebagai dasar dalam pembuktiannya. Struktur argumen subjek FA dapat diuraikan sebagai berikut.

Data : $a, b \in \mathbb{R}$

Warrant : $|a + b| = a + b$

$|a| + |b| = a + b$

Backing : Harga mutlak selalu bernilai positif

Rebuttal : Kecuali jika ada contoh penyangkal

Qualifier : Sehingga dimungkinkan

Conclusion : $|a + b| = |a| + |b|$

Berdasarkan uraian struktur argumen subjek dalam membangun bukti matematis, hambatan pada tiap-tiap komponen argumen dapat diidentifikasi. Berikut adalah hambatan yang muncul dalam komponen-komponen struktur argumen subjek berdasarkan kerangka Toulmin.

1. Hambatan pada komponen data dialami oleh FA yaituia tidak menggunakan seluruh data yang telah diketahui sebagai landasan dalam argumennya.
2. Hambatan pada komponen *warrant* dialami oleh semua subjek. Dalam melakukan justifikasi hubungan antara data dan kesimpulan, terdapat dua tipe berdasarkan yang ditunjukkan oleh subjek yaitu tipe induktif dan deduktif. Pada tipe induktif, subjek hanya memberikan contoh suatu kasus namun tidak dapat mencakup seluruh kemungkinan kasus yang muncul. Sedangkan pada tipe deduktif, subjek berusaha mebuat argumen berdasarkan fakta, teorema, aturan, namun penerapannya tidak valid.
3. Hambatan dalam mengidentifikasi pendukung justifikasihubunganantara data dankesimpulan (hambatan pada komponen *Backing*). Pada subjek dengan *warrant* tipe induktif, pendukung justifikasi hanya didasarkan pada suatu contoh kasus. Sedangkan pada subjek dengan tipe*warrant* deduktif namun tidak valid, *backing* yang diberikan juga tidak didasarkan pada pernyataan yang valid.
4. Pada komponen *Rebuttal*, semua subjek dalam penelitian ini mengalami hambatan ketika menganalisis kemungkinan kondisi yang menyebabkan suatu kesimpulan tidak berlaku. Hal ini ditunjukkan pada saat megevaluasi pernyataan 1 dan 2, hampir seluruh subjek tidak dapat mengidentifikasi contoh penyangkal pernyataan salah. Salah satu subjek yaitu FA dapat mengidentifikasi contoh penyangkal, namun pada salah satu bagian melakukan kesalahan dalam menyimpulkan. Peran contoh penyangkal akan sangat signifikan ketika subjek

cenderung menggunakan penalaran bentuk induktif.

Inglisdkk (2007) membuktikan bahwa komponen *rebuttal* dan *modal qualifier* berpotensi membedakan antara matematikawan ahli dengan pemula dalam menggunakan argumen non formal. MenurutInglisdkk (2007), seorang ahli cenderung memberikan perhatian terhadap kedua komponen tersebut untuk meyakinkan diri terhadap klaimnya.Pada penelitian ini, ketika mahasiswa dihadapakan pada pernyataan salah namun "tampak benar" untuk beberapa kasus, sebagian besar mahasiswa tidak dapat mencapai penemuan contoh penyangkal untuk menolak pernyataan tersebut. Pada mahasiswa yang tidak dapat memberikan contoh penyangkal, justru cenderung memberikan contoh beberapa kasus tanpa memperhatikan apakah kasus-kasus yang ia sebutkan dapat mewakili semua kondisi yang berlaku dalam pernyataan tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa cara berpikir mereka secara induktif tetapi tidak didukung oleh *rebuttal* dan *qualifier* yang kuat. Perilaku yang ditunjukkan mahasiswa konsisten ketika ia diminta membuktikan suatu pernyataan benar. Mahasiswa tersebut cenderung tidak memperhatikan semua kemungkinan kasus yang memenuhi kondisi pernyataan tersebut. Mereka mengevaluasi pernyataan untuk sebagian kasus.Knuth dkk (2011) memandang bahwa strategi induktif merupakan bentuk penalaran yang kuat dan berguna dalam membangun dasar dari justifikasi dan penjelasan matematis. Pedemonte(2007) menemukan bahwa subjek yang sedang mencari solusi dan tidak mendapatkan ide tentang teori mana yang dapat digunakan, mereka memperhatikan kasus-kasus berbeda, mengekplorasi, dan mencari strategi-strategi yang berbeda.Pedemonte (2007) juga menambahkan bahwa argumentasi induktif siswa berdasarkan generalisasi pola yang mungkin merepresentasikan hambatan bagi mereka. Oleh karena itu, kemampuan berpikir secara induktif sangat diperlukan oleh setiap individu dalam melakukan pembuktian matematis, dan dalam hal ini kemampuan dalam menemukan contoh penyangkal berperan dalam menjamin kevalidan argumen yang dihasilkan melalui strategi induktif.

Temuan lain dalam penelitian ini yaitu kegagalan mahasiswa dalam pembuktian antara lain disebabkan oleh hambatan dalam mengidentifikasi data secara lengkap sebagai dasar dari pembuktian. Subjek mungkin saja menuliskannya tetapi tidak benar-benar menggunakannya. Hal ini tentu saja menghambat subjek untuk merumuskan kesimpulan yang tepat. Hambatan yang dialami mahasiswa dalam membuat justifikasi antara lain karena komponen backing dan warrant berupa pernyataan yang tidak valid.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Hambatan mahasiswa dalam membangun bukti matematis dapat diuraikan berdasarkan kerangka argumen Toulmin. Ketidaklengkapan setiap komponen argumen menyebabkan hambatan dalam menyusun bukti.
2. Dalam strategi induktif, contoh penyangkal berperan dalam membangun argumen yang valid
3. Sebagian mahasiswa dalam penelitian ini tidak mampu menyusun bukti matematis karena tidak menggunakan data secara lengkap. Ia tidak dapat mengidentifikasi kondisi apa yang disediakan untuk membuktikan suatu pernyataan.

Saran

Berdasarkan kesimpulan di atas peneliti menyarankan sebagai berikut.

1. Dosen perlu mengoptimalkan peran contoh penyangkal dalam pembelajaran untuk mendukung penalaran siswa ketika melakukan pembuktian.
2. Dosen perlu menciptakan kondisi belajar yang mengaktifkan kemampuan siswa dalam mengidentifikasi setiap informasi dalam pernyataan, serta mengkategorikannya sebagai kondisi yang sudah diketahui atau kondisi yang akan dibuktikan
3. Subjekpenelitianiniterbataspadamahasiswa yang tidak dapat menyebutkan contoh penyangkal secara sempurna. Peneliti belum menyelidiki lebih lanjut tentang perbedaan karakteristik bukti dari mahasiswa yang mampu dan tidak mampu menyebutkan contoh penyangkal secara tepat. Oleh karena itu, perlu adanya penelitian lebih lanjut mengenai karakteristik bukti matematis mahasiswa berdasarkan kemampuan mengidentifikasi contoh penyangkal

DAFTAR PUSTAKA

Aberdein, A. 2005. The Uses of Argument in Mathematics. Argumentation, 19, 287–301.

Aberdein, A. 2006. The Informal Logic of Mathematical Proof. Dalam R.Hersh (Ed.), *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, (pp.56–70). Berlin Heidelberg New York: Springer.

Brinkerhoff, J. A. 2007. Applying Toulmin's Argumentation Framework to Explanations in a Reform Oriented Mathematics Class. All Theses and Dissertations. Paper 1408.

Brodie, K. 2010. *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms.*New York: Springer.

Hanna, G. & Jahnke, N. 1996. Proof and Proving. Dalam Bishop AJ, Clements K, Keitel C, Kilpatrick J, Laborde C (eds), *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer, Dordrecht.

Knipping, C. 2002. *Argumentation Structures in Classroom Proving Situations.* European Research In Mathematics Education III

Knuth, E., Kalish, C., Ellis, A., Williams, C., & Felton, M. 2011. Adolescent Reasoning in Mathematical and Non-mathematical Domains: Exploring the Paradox. Dalam V. Reyna, S. Chapman, M. Dougherty, & J. Confrey (Eds.), The Adolescent Brain: Learning, Reasoning, and Decision

Making (183- 210). Washington, DC: American Psychological Association.

Krummheuer, G. 1995. The ethnography of argumentation. Dalam: P. Cobb und H. Bauersfeld (Ed.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates, 229-269.

National Council of Teachers of Mathematics. 2009. *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making*. USA: NCTM.

Pedemonte, Bettina. 2007. How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Matematics, 66* (1): 23-41.

Subanji. 2011. *TeoriBerpikir Pseudo PenalaranKovariasi*. Malang: UM Press.

Tall, D. & Mejia-Ramos, J. P. 2009. The Long-term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof. Dalam Hanna, G., Jahnke, H. N., & Pulte, H. (Eds.) , *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives.* New York: Springer.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. 2010.Cognitive development of proof.In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 13-49).Springer, Dordrecht.

Thompson, P. W. 1996. Imagery and The Development of Mathematical Reasoning. Dalam L. P. Steffe, B. Greer, P. Nesher, P. Cobb, & G. Goldin (Ed.), *Theories of Learning Mathematics* (267-283). Hillsdale,N J: Erlbaum.

Toulmin, S. 2003. The Uses of Argument (Updated Edition). UK: Cambridge University Press.

Umah, U. 2016. Struktur Argumentasi Penalaran Kovariasional Siswa Kelas VIIIB MTsN 1 Kediri. *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 1(1): 1- 12.

Yackel, E. 2002. What We Can Learn From Analyzing The Teacher's Role in Collective Argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 423-440.